

Opción A

Ejercicio 1 de la opción A del modelo 5 de 1999.

[2'5 puntos] Haciendo el cambio de variable $t = e^x$, calcula $\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx$

Solución

Calculamos primero la integral indefinida

$I = \int [e^x / (e^{2x} + 3e^x + 2)] dx$ Nos dan el cambio $t = e^x$, luego $dt = e^x dx$, y sustituyendo nos queda

$I = \int dt / (t^2 + 3t + 2)$, que es una integral racional. Descomponemos en factores simples el denominador

$1 / (t^2 + 3t + 2) = A / (t+1) + B / (t+2) = [A(t+2) + B(t+1)] / [(t+1)(t+2)]$. Igualando numeradores tenemos
 $1 = A(t+2) + B(t+1)$

Para $t = -1$, tenemos $1 = A \cdot 1$, de donde $A = 1$

Para $t = -2$, tenemos $1 = -B$, de donde $B = -1$

Luego

$$I = \int dt / (t^2 + 3t + 2) = \int [A / (t+1) + B / (t+2)] dt =$$

$$= \int [1 / (t+1) + (-1) / (t+2)] dt = 1 \cdot \ln |t+1| - 1 \cdot \ln |t+2| = \ln |(t+1)/(t+2)| =$$

Quitando el cambio

$$= \ln |(e^x+1)/(e^x+2)|. \text{ Por tanto}$$

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^{2x} + 3e^x + 2} dx = \left[\ln \left(\frac{e^x+1}{e^x+2} \right) \right]_0^1 = [(\ln \{ (e^1+1)/(e^1+2) \}) - (\ln \{ (e^0+1)/(e^0+2) \})]$$

Ejercicio 2 de la opción A del modelo 5 de 1999.

[2'5 puntos] Se sabe que la función $f : [0,5] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} ax+bx^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ c+\sqrt{x-1} & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$

es derivable en el intervalo $(0,5)$ y verifica $f(0) = f(5)$. ¿Cuánto valen a , b y c ?

Solución

$$f(x) = \begin{cases} ax+bx^2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ c+\sqrt{x-1} & \text{si } 2 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

Es derivable en $(0,5)$, luego es continua en $(0,5)$. En concreto existe $f'(2)$, es continua en $x = 2$, y además $f(0) = f(5)$

$$f'(x) = \begin{cases} x+2bx & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si } 2 \leq x < 5 \end{cases}$$

$0 = f(0) = f(5) = c + \sqrt{5-1}$, es decir

$0 = c + 2$, de donde $c = -2$

$f(x)$ es continua en $x = 2$ tenemos $f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$

De $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (c + \sqrt{x-1}) = c + 1 = -2 + 1 = -1$

De $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax + bx^2) = 2a + 4b$

Igualando tenemos $-1 = 2a + 4b$

Como existe $f'(2)$, tenemos que $f'(2^-) = f'(2^+)$

$f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (a + 2bx) = a + 4b$

$f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (1 / 2\sqrt{x-1}) = 1/2$.

Igualando tenemos $1/2 = a + 4b$. Tenemos

$$-1 = 2a + 4b$$

$$1/2 = a + 4b$$

Resolviendo este sistema obtenemos $a = -3/2$ y $b = 1/2$.

Ejercicio 3 de la opción A del modelo 5 de 1999.

[2'5 puntos] Halla el punto Q simétrico del punto $P = (2,0,1)$ respecto de la recta r que pasa por el punto

$A=(0,3,2)$ y es paralela a la recta s de ecuaciones $s \equiv \begin{cases} x+2y=0 \\ z=0 \end{cases}$

(a) [1'5 puntos] Halla la recta que pasa por A y por el punto medio del segmento AB.

(b) [1 punto] Halla la recta paralela a la anterior que pasa por el punto $(2, 2, 2)$

Solución

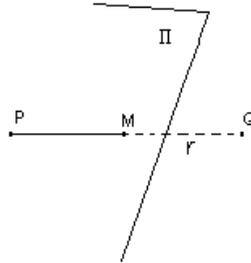
La recta r que es paralela a la recta s tiene como vector director el de la recta s

Tomando $y = \lambda$, la recta s en vectorial es $(x,y,z) = (-2\lambda, \lambda, 0)$ por tanto un vector director es $\mathbf{v} = (-2,1,0)$

La recta r pasa por el punto $A(0,3,2)$ y tiene como vector director $\mathbf{v} = (-2,1,0)$, luego su ecuación en vectorial es

$$r \equiv (x,y,z) = (-2\lambda, 3+\lambda, 2)$$

Para hallar el simétrico del punto $P(2,0,1)$ respecto de la recta r , calculamos el plano Π que pasa por P y es perpendicular a r (\mathbf{n} su vector normal \mathbf{n} será el director de r \mathbf{v}), determinamos el punto de corte de dicho plano Π con la recta r (el punto M), y M será punto medio del segmento PQ , siendo Q el punto simétrico buscado



El plano Π tiene como punto $P(2,0,1)$ y vector normal $\mathbf{n} = \mathbf{v} = (-2,1,0)$, su ecuación es

$$\Pi \equiv -2(x-2) + 1(y-0) + 0(z-1) = -2x + y + 4 = 0$$

El punto M intersección de r con Π

$$-2(-2\lambda) + (3+\lambda) + 4 = 0, \text{ de donde } \lambda = -7/5, \text{ y } M(-2(-7/5), 3+(-7/5), 2) = M(14/5, 8/5, 2)$$

M es el punto medio de $P(2,0,1)$ y del simétrico Q buscado

$$(14/5, 8/5, 2) = [(2+x)/2, (0+y)/2, (1+z)/2], \text{ de donde } x = 18/5, y = 16/5 \text{ y } z = 3, \text{ por tanto el simétrico es } Q(18/5, 16/5, 3).$$

Ejercicio 4 de la opción A del modelo 5 de 1999.

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(a) [1'5 puntos] Determina si A y B son invertibles y, en su caso, calcula la matriz inversa.

(b) [1 punto] Resuelve la ecuación matricial $BA - A^2 = AB - X$.

Solución

(a)

Existe A^{-1} si y solo si $|A| \neq 0$

Como $|B| = 0$, por tener una fila de ceros, no existe B^{-1}

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1(-2) = -3 \neq 0, \text{ por tanto existe } A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A^t); \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A^t) = \frac{1}{-3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

(b)

$BA - A^2 = AB - X$, de donde $X = A^2 + AB - BA$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Opción B

Ejercicio 1 de la opción B del modelo 5 de 1999.

[2'5 puntos] Dos partículas A y B se mueven en el plano XOY. En cada instante de tiempo t las posiciones de las partículas son, respectivamente $A(\frac{1}{2}(t-1), \frac{\sqrt{3}}{2}(1-t))$ y $B(2-t, 0)$.

Determina el instante t_0 en el que las partículas están más próximas entre sí y a qué distancia se hallan una de otra en ese instante.

Solución

Nos piden hacer mínima la distancia $d(A,B) = |\mathbf{AB}|$

$$\mathbf{AB} = (2-t - 1/2t - 1/2, -\sqrt{3}/2 + \sqrt{3}/2t) = (3/2(-t+1), \sqrt{3}/2(t-1))$$

$$d(A,B) = \sqrt{\frac{9}{4}(-t+1)^2 + \frac{3}{4}(t-1)^2}$$

Calculamos su primera derivada y la igualamos a cero y nos dará el mínimo

$$d' = \frac{18/4(-t+1)(-1) + 3/4(t-1)}{2\sqrt{9/4(-t+1)^2 + 3/4(t-1)^2}}$$

Igualando $d' = 0$, obtenemos $(t-1) \cdot (9/2 + 3/4) = 0$, de donde $t=1$, que es el instante en el que están más próximas entre sí.

Si sustituimos en $d(A,B)$, la distancia es cero, pues los dos sumandos que hay dentro de la raíz son cero.

Ejercicio 2 de la opción B del modelo 5 de 1999.

(a) [1 punto] Calcula la integral $\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{(\operatorname{cos}(x))^3} dx$

Realizando el cambio de variable $\operatorname{cos}(x) = t$

(b) [1 punto] Calcula la misma integral que en el apartado anterior pero haciendo el cambio de variable $\operatorname{tg}(x) = u$

(c) [0'5 puntos] ¿Se obtiene el mismo resultado en ambos casos? Justifica la respuesta..

Solución

(a)

$$I = \int [\operatorname{sen}(x) / (\operatorname{cos}(x))^3] dx \text{ con el cambio } \operatorname{cos}(x) = t; -\operatorname{sen}(x) dx = dt$$

$$I = \int [\operatorname{sen}(x) / (\operatorname{cos}(x))^3] dx = \int (-dt / t^3) = - \int t^{-3} dt = -t^{-2} / (-2) = 1 / 2t^2 = (\text{quitando cambio}) = \\ = 1 / 2(\operatorname{cos}(x))^2 + K$$

(b)

$$I = \int [\operatorname{sen}(x) / (\operatorname{cos}(x))^3] dx \text{ con el cambio } \operatorname{tg}(x) = u; [1 / \operatorname{cos}^2(x)] dx = du$$

$$I = \int [\operatorname{sen}(x) / (\operatorname{cos}(x))^3] dx = \int [\{\operatorname{sen}(x)/\operatorname{cos}(x)\} \cdot \{dx/\operatorname{cos}^2(x)\}] = \int u \cdot du = u^2/2 = (\text{quitando cambio}) = \\ = (\operatorname{tan}^2(x))/2 + M$$

(c)

El resultado que se obtiene es el mismo pues hay que tener en cuenta que dos primitivas se diferencian en una constante, es decir

$$1 / [2\operatorname{cos}^2(x)] = \frac{1}{2} \operatorname{tan}^2(x) + K = [\operatorname{sen}^2(x) / 2\operatorname{cos}^2(x)] + K$$

$$1 = \operatorname{sen}^2(x) + 2K\operatorname{cos}^2(x)$$

$$1 - \operatorname{sen}^2(x) = 2K\operatorname{cos}^2(x)$$

$$\operatorname{cos}^2(x) = 2K\operatorname{cos}^2(x)$$

De donde $K = \frac{1}{2}$ (también sale $\operatorname{cos}(x) = 0$)

Ejercicio 3 de la opción B del modelo 5 de 1999.

Considera la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 13$

(a) [1'5 puntos] Representala indicando su centro y su radio

(b) [2 puntos] Halla el área de la figura limitada por las tres rectas siguientes:

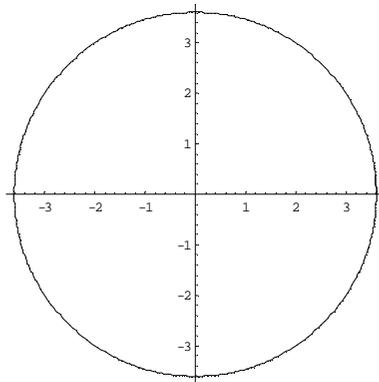
(i) la recta tangente a la circunferencia en el punto $A = (3,2)$

(ii) la recta normal a la circunferencia en el punto A .

(iii) el eje de abscisas

Solución

(a)



Su centro es el punto (0,0) y su radio es $\sqrt{13}$

(b)

La recta tangente en el punto A(3,2) es $y - 2 = y'(3,2) \cdot (x - 3)$.

Hallamos la derivada implícita y calculamos el valor $y'(3,2)$.

$$x^2 + y^2 = 13$$

Derivando en forma implícita

$2x + 2y \cdot y' = 0$, de donde $y' = -2x / 2y = -x / y$. Por tanto

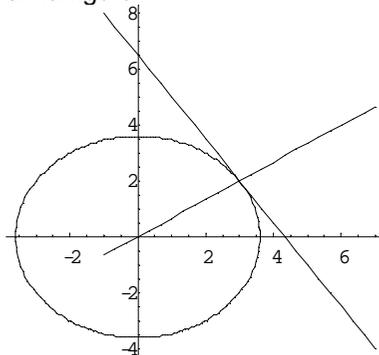
$y'(3,2) = -3 / 2$, y la recta tangente en A(3,2) es

$y - 2 = -3/2(x - 3)$. Operando se obtiene $y = -3/2x + 13/2$

La pendiente m de una recta y la de su normal m' , verifican que $m \cdot m' = -1$, por tanto la ecuación de la recta normal en el punto A(3,2) es

$y - 2 = 2/3(x - 3)$, y operando se obtiene $y = 2/3x$

Para hallar el área pedida nos fijamos en la figura



y lo que nos piden es el área del triángulo formado por la recta normal, la recta tangente y el eje de abscisas, pero

Área = $1/2 \cdot \text{base} \cdot \text{altura} = 1/2$ (corte de la tangente con abscisas, que es $13/3$ {hacer $y = 0$, en la tangente}). (la ordenada del punto A que es 2), luego

$$\text{Area} = 1/2 \cdot (13/3) \cdot 2 = 13/3 \text{ u.a.}$$

Este resultado también se puede obtener integrando, es decir

$$\text{Area} = \int_0^3 (2/3x) dx + \int_3^{13/3} (-3/2x + 13/2) dx = 13/3 \text{ u.a.}$$

Ejercicio 4 de la opción B del modelo 5 de 1999.

(a) [1'5 puntos] El determinante $\begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix}$ vale cero para $a = 3$.

Comprueba esta afirmación sin desarrollarlo e indicando las propiedades de los determinantes que apliques.

(b) [1 punto] Determina todos los valores de a para los que las tres columnas del determinante anterior representan vectores linealmente dependientes. Justifica la respuesta.

Solución

(a)

Tomando $a = 3$. vemos que la tercera columna es suma de la primera y la segunda, y por tanto al depender linealmente el determinante vale cero

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 3^2 & 13 \\ 8 & 3^3 & 35 \end{vmatrix} = 0$$

(b)

$$0 = \begin{vmatrix} 2 & a & 5 \\ 4 & a^2 & 13 \\ 8 & a^3 & 35 \end{vmatrix} = 2a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & a & 13 \\ 4 & a^2 & 35 \end{vmatrix} = 2a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & a-2 & 3 \\ 0 & a^2-4 & 15 \end{vmatrix} = 2a[15(a-2) - 3(a^2-4)] = 2a[15(a-2) - 3(a-2)(a+2)] =$$

$$= 2a[(a-2)(15-3(a+2))] = 2a(a-2)(9-3a)$$

Por tanto este determinante vale cero si y solo si $a = 0$, $a = 2$ y $a = 3$